3. Бондаренко А.В., Даньщиков Е.В., Елкин Н.Н. и др. *Угловая селекция излучения при регенеративном усилении в лазере с неустойчивым резонатором*//Квантовая электроника. – 1988. – №1. – С.30-36.

4. Елкин Н.Н., Ильиных О.И., Лиханский В.В., Напартович А.П., Трощиева В.Н. *Усиление света при инжекции в неустойчивый резонатор с активной средой.* Препринт ИАЭ-4527/16. – М.: ЦНИИатоминформ, 1987. – 16 с.

5. Черепенин Н.Д. *К расчету поля излучения в неустойчивых оптических резонаторах на основе интегральных уравнений*//В кн.: Математическое моделирование в физической газовой динамике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – С.71-84.

О РАСЧЕТЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. К. Касумов

Институт математики и механики АН Азербайджана, Баку

I. Постановка задачи. Рассмотрим пространственную стержневую конструкцию, нагруженную произвольным образом и состоящую из прямолинейных стержней, жестко скрепленных между собой. Пусть материал каждого элемента описывается линейным соотношением вязкоупругости, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{y} + \varepsilon_{ij}^{в}$, где ε_{ij} - полная деформация, ε_{ij}^{y} - упругая составляющая, $\varepsilon_{ij}^{в}$ - вязкая составляющая. Для простоты предположим, что материал является изотропным. Тогда имеем [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{y} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}), \\ \varepsilon_{ij}^{в} &= \frac{3}{2}\int_0^t K(t-\tau)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ke}\delta_{ke}\right)d\tau, \end{aligned} \tag{1}$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, σ_{ij} - полное напряжение, δ_{ij} - тензор Кронекера, $K(t)$ - ядро ползучести.

Предположим, что задача решается в рамках геометрической линейности, т.е. соотношение Коши возьмем в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \tag{2}$$

где U_i - компоненты вектора перемещения. В этом случае уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x_j}+F^i=0, \tag{3}$$

где F_i - вектор объемных сил.

Решение системы уравнений (1) - (3) для пространственной стержневой конструкции является сложной задачей. В ряде случаев для его построения применяется МКЭ [2]. Известно, что суть метода заключается в разбиении всей конструкции на конечные элементы, аппроксимации решения для каждого элемента простыми функциями и "сшивания" этих решений в узловых точках. Очевидно, что число уравнений определяющей системы определяется числом разбиений.

Предлагаемый нами метод существенно уменьшает число уравнений определяющей системы и, кроме того, снимает вопрос об определении числа разбиений каждого элемента.

Суть метода заключается в следующем: вся конструкция разбивается на стержни, из которых она состоит, т.е. элементом разбиения является сам стержень, далее для каждого стержня строится аналитическое решение, использование этого решения аналогично использованию аппроксимации в МКЭ и поэтому остальные процедуры не меняются. Таким образом, основной задачей в данном методе является получение аналитического решения для стержня. Используем для этого вариационный принцип Лагранжа.

2. Вариационный принцип Лагранжа. Разрешим физические соотношения (1), в силу линейности уравнений получим

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{y}+\sigma_{ij}^{в},\quad \sigma_{ij}^{y}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\theta\delta_{ij},\\ \sigma_{ij}^{в}=-\frac{2}{3}\int_0^t\Gamma(t-\tau)\left(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\theta\delta_{ij}\right)d\tau,\end{gathered} \tag{4}$$

где σ_{ij}^{y}, $\sigma_{ij}^{в}$ - упругая и вязкая составляющие напряжения, $\Gamma(t)$ - ядро резольвенты, $\theta=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$, $\mu=E/[2(1+\nu)]$. Рассмотрим функционал

$$J=\int_V\left\{\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{y}+\sigma_{ij}^{в}\right)\varepsilon_{ij}-F_iU_i\right\}dV, \tag{5}$$

где V - объем тела, ε_{ij} задается соотношением Коши (2), σ_{ij}^{y} и $\sigma_{ij}^{в}$ определяются равенством (4). Независимыми варьируемыми величинами являются U_i в рассматриваемый момент времени. Принцип Лагранжа гласит: среди всевозможных перемещений, принимающих на границе тела заданные значения, истинными, т.е. удовлетворяющими уравнению равновесия, являются те, для которых функционал (5) принимает стационарное значение.

Для доказательства этого принципа найдем первую вариацию. Исходя из условия варьирования, имеем

$$\delta J = \int_V \left\{ \frac{1}{2}\sigma_{ij}^y \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}^y + \sigma_{ij}^в \delta\varepsilon_{ij} - F_i \delta U_i \right\} dV. \tag{6}$$

Отметим, что $\delta\sigma_{ij}^в = 0$, так как $\sigma_{ij}^в$ зависит от истории нагружения, а не от деформаций в рассматриваемый момент времени. Учитывая соотношения Бетти [3] для упругой составляющей, соотношения Коши и используя теорему Гаусса, получим

$$\delta J = \int_V \left\{ \sigma_{ij} \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - F_i \delta U_i \right\} dV = \int_V \left\{ \sigma_{ij} \delta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - F_i \delta U_i \right\} dV =$$

$$= \int_S \sigma_{ij} n_j \delta U_i dS - \int_V \left\{ \delta U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \delta U_i \right\} dV$$

где S - поверхность тела. Так как на S заданы перемещения, то на ней $\delta U_i = 0$. Исходя из условия стационарности функционала $\delta J = 0$ и с учетом основной леммы вариационного исчисления, получаем систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad x \in V.$$

Принцип Лагранжа позволяет получить уравнения равновесия для произвольного тела, в частности, и для одномерного, т.е. стержня, но при этом необходимо функционал (5) преобразовать с учетом геометрии рассматриваемого тела.

3. Преобразование функционала Лагранжа для расчета прямолинейного стержня. Рассмотрим стержень в декартовой системе координат. Представим перемещение произвольной точки стержня в виде

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{\psi} \times \vec{r}, \tag{7}$$

где $\vec{U}_0$ - вектор перемещения точки на срединной оси, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки сечения, $\vec{\psi}$ - вектор вращения сечения. В покомпонентной записи из (7) получим

$$U_x = U + \psi_y z - \psi_z y, \quad U_y = V - \psi_x \cdot z, \quad U_z = W + \psi_x \cdot y. \tag{8}$$

С учетом полученных равенств соотношения Коши примут вид

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial U}{\partial x}+z\frac{\partial \psi_y}{\partial x}-y\frac{\partial \psi_z}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0,\ \varepsilon_{yz}=0,$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\psi_y+\frac{dW}{dx}+y\frac{d\psi_x}{dx}\right),\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(-\psi_z+\frac{\partial V}{\partial x}-z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Равенства (9) видоизменяют и физические соотношения. Основываясь на (4), получим

$$\sigma_{xx}^{y}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xx}\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right),\quad \sigma_{yy}^{y}=\sigma_{zz}^{y}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx},$$
$$\sigma_{xy}^{y}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy},\quad \sigma_{xz}^{y}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xz},\quad \sigma_{yz}^{y}=0$$
$$\sigma_{xx}=-\int_0^t\Gamma(t-\tau)\varepsilon_{xx}d\tau,\ \sigma_{yy}^{в}=\sigma_{zz}^{в}=-\frac{1}{3}\int_0^t\Gamma(t-\tau)\varepsilon_{xx}d\tau, \tag{10}$$
$$\sigma_{xy}^{в}=-\frac{2}{3}\int_0^t\Gamma(t-\tau)\varepsilon_{xy}d\tau,\ \sigma_{xz}^{в}=-\frac{2}{3}\int_0^t\Gamma(t-\tau)\varepsilon_{xz}d\tau,\ \sigma_{yz}^{в}=0.$$

Для получения уравнений равновесия целесообразно преобразовать не сам функционал, а его первую вариацию. Пренебрегая объемными силами и считая, что $dV=dx\cdot dF$, на основании (6) и (9) имеем

$$\delta J=\int_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV=\int_0^l\int_F\left\{\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}\right\}dxdF, \tag{11}$$

где l – длина стержня, F – площадь поперечного сечения. Подставляя в (11) зависимость деформации от перемещения, получим

$$\delta J=\int_0^l\left\{N\cdot\delta\frac{\partial U}{\partial x}+Q_y\delta(-\psi_z)+Q_z\delta\psi_y+Q_y\delta\frac{\partial V}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+Q_z\cdot\delta\frac{\partial W}{\partial x}+M_x\delta\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+M_y\delta\frac{\partial\psi_y}{\partial x}+M_z\delta\frac{\partial\psi_z}{\partial x}\right\}dx, \tag{12}$$

где $N=\int_F\sigma_{xx}dF,\ Q_y=\int_F\sigma_{xy}dF,\ Q_z=\int_F\sigma_{xz}dF,\ M_x=\int_F(\sigma_{xz}y-\sigma_{xy}z)dF,$

$M_y=\int_F\sigma_{xx}zdF,\ M_z=-\int_F\sigma_{xx}\cdot ydF.$

Отметим, что условие задания перемещений на поверхности для теории стержней эквивалентно заданию U, V, W, ψ_x,ψ_y,ψ_z в точках $x=0$ и $x=l$. Преобразуем первую вариацию (12), представив ее как сумму произведений, сомножители которых есть вариация искомой величины. Используя формулу Лейбница, из условия стационарности $\delta J=0$ получаем следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial Q_z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial M_y}{\partial x}-Q_z=0, \quad \frac{\partial M_z}{\partial x}+Q_y=0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Очевидно, в силу принципа Лагранжа, уравнения (13) являются уравнениями равновесия прямолинейного стержня. Для замыкания системы уравнений выпишем физические соотношения, проинтегрировав (10) по F. Предположим, что ось проходит через центр сечения. Тогда из (10) следует

$$
\begin{aligned}
&N=FE\frac{\partial U}{\partial x}-F\int_0^t\Gamma(t-\tau)\frac{\partial U}{\partial x}d\tau,\\
&Q_y=\frac{EF}{2(1+\nu)}\left(-\psi_z+\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{1}{3}F\int_0^t\Gamma(t-\tau)\left(-\psi_z+\frac{\partial V}{\partial x}\right)d\tau,\\
&Q_z=\frac{EF}{2(1+\nu)}\left(\psi_y+\frac{\partial W}{\partial x}\right)-\frac{1}{3}F\int_0^t\Gamma(t-\tau)\left(\psi_y+\frac{\partial W}{\partial x}\right)d\tau,\\
&M_x=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(I_y+I_z\right)\frac{d\psi_x}{dx}+\frac{1}{3}\left(I_y+I_z\right)\int_0^t\Gamma(t-\tau)\frac{\partial\psi_x}{\partial x}d,
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
M_y=EI_y\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-I_y\int_0^t\Gamma(t-\tau)\frac{\partial\psi_y}{\partial x}d\tau,\ M_z=-EI_z\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-I_z\int_0^t\Gamma(t-\tau)\frac{\partial\psi_z}{\partial x}d\tau.
$$

Отметим, что последние три уравнения системы (14) получены после интегрирования соответствующей комбинации уравнений системы (10).

Итак, система уравнений (13) и (14) вместе с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x=0 \quad U=U_1,\, V=V_1,\, W=W_1,\, \psi_x=\psi_{x_1},\, \psi_y=\psi_{y_1},\, \psi_z=\psi_{z_1},\\
&\text{при } x=l \quad U=U_2,\, V=V_2,\, W=W_2,\, \psi_x=\psi_{x_2},\, \psi_y=\psi_{y2},\, \psi_z=\psi_{z2}
\end{aligned} \tag{15}
$$

решает задачу об определении напряженно-деформированного состояния прямолинейного вязкоупругого стержня.

4. Построение матрицы жесткости. Для построения матрицы жесткости необходимо определить напряженно-деформированное состояние в стержне, то есть решить систему уравнений (13), (14) при граничных условиях (15).

Из (13) получим

$$
\begin{gathered}
N_x=N_0,\, Q_y=Q_{y_0},\, Q_z=Q_{z0},\\
M_x=M_{x0},\, M_z=-Q_{y0}x+M_{z0},\, M_y=Q_{z0}x+M_{y0},
\end{gathered}
$$

где величины с индексом «0» являются неизвестными функциями t. Учитывая их в (14) и принимая для простоты $\nu = 0{,}5$, $\Gamma^* f = \dfrac{1}{E}\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)\, f(\tau) d\tau$, получим

$$
\begin{gathered}
N_0 = FE\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial U}{\partial x},\ Q_{y_0} = \frac{EF}{3}\left(1-\Gamma^*\right)\left(-\psi_z + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \\
Q_{z_0} = \frac{EF}{3}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial x}\right),\ M_{x_0} = \frac{E}{3}\left(I_y + I_z\right)\left(1-\Gamma^*\right)\frac{d\psi_x}{dx},
\end{gathered}
\tag{16}
$$

$$
Q_{z_0} x + M_{y_0} = EI_y\left(I-\Gamma^*\right)\frac{d\psi_y}{dx},\ -Q_{y_0} x + M_{z_0} = -EI_z\left(I-\Gamma^*\right)\frac{d\psi_z}{dx}.
$$

Решение системы (16) представим в виде

$$
U(x,t) = U_1(t)\left(1-\frac{x}{l}\right) + U_2(t)\frac{x}{l},\ \psi_x = \psi_{x_1}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \psi_{x_2}\frac{x}{l},
$$

$$
V(x,t) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{6}{F}I_z \cdot x + \frac{x^2 l}{2}\right)\frac{A_y}{l}D(V_1 - V_2) + V_1 +
$$

$$
+\left[x - \frac{x^2}{2l} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{6}{F}I_z \cdot x - \frac{x^2 l}{2}\right)\frac{A_y}{2}D\left(\psi_{z_1} + \psi_{z_2}\right) + \left(-x + \frac{x^2}{l}\right)\psi_{z_2}\right],
$$

$$
W(x,t) = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{6}{F}I_y \cdot x - \frac{x^2 l}{2}\right)\frac{A_z}{2}D(W_1 - W_2) + W_1 +
$$

$$
+\left[-x + \frac{x^2}{2l} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{6}{F}I_y \cdot x - \frac{x^2 l}{2}\right)\frac{A_z}{2}D\left(\psi_{y_1} - \psi_{y_2}\right) + \left(x - \frac{x^2}{l}\right)\psi_{y_2}\right],
$$

$$
{}_y = \frac{x^2 - xl}{l}A_z D(W_1 - W_2) +
$$

$$
+\left(1 - \frac{x}{l} - \frac{x^2 - xl}{2}A_z D\right)\left(\psi_{y_1} + \psi_{y_2}\right) + \left(-1 + \frac{2x}{l}\right)\psi_{y_2},
$$

$$
{}_z = -\frac{x^2 - xl}{l}A_y D(V_1 - V_2) +
$$

$$
+\left(1 - \frac{x}{l} - \frac{x^2 - xl}{2}A_y D\right)\left(\psi_{z_1} + \psi_{z_2}\right) + \left(-1 + \frac{2x}{l}\right)\psi_{z_2},
$$

где

$$
A_y = \frac{1}{6}l^2 + \frac{6}{F}I_y,\ A_z = \frac{1}{6}l^2 + \frac{6}{F}I_z,\ D = -\frac{1}{A_y A_z}.
$$

Это решение позволяет, исходя из формул (14), определить распределение напряженного состояния. В частности, определить усилия и моменты на концах стержня. Это означает, что построена матрица жесткости для одного элемента в локальной системе координат. Дальнейшая процедура построения матрицы жесткости в глобальной системе координат и для всей конструкции аналогична процедурам в МКЭ, поэтому они здесь не приводятся. Кроме того, считается, что в узлах конструкции заданы силы, которые входят в правую часть системы определяющих уравнений, построенных по МКЭ [2]. Отличительной особенностью получаемой системы от аналогичной системы для статической упругой задачи является то, что правая часть зависит от времени, даже если нагрузка постоянна во времени. Это объясняется тем, что результат воздействия оператора $I + K^*$ на постоянную величину есть функция времени. Решение полученной системы основано на МКЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела.* – М.: Наука, 1988. – 712 с.
2. Зенкевич О.К. *Метод конечных элементов в технике.* – М.: Мир, 1975. – 541с.
3. Амензаде Ю.А. *Теория упругости.* – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
4. Касумов А.К. *Модификация метода конечных элементов для расчета стержневых конструкций.* – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1996. – 152 с.
5. Касумов А.К. *Применение метода конечных элементов к расчету стержневых конструкций из композиционных материалов.* – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1996. – 76 с.

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, СВЕРТКИ, ОДНОСТОРОННЯЯ ОБРАТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Какичев

theorphy@info.novsu.ac.ru

Доклад является наброском идей, методов и конструкций из ряда еще неопубликованных работ, выполненных автором в последние